



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



## Wykład 14

# Metody energetyczne

# Metody energetyczne

## Zasada wzajemności prac Bettiego

Jeśli na liniowy i sprężysty ustrój działają kolejno dwa różne obciążenia, to praca pierwszego obciążenia na przemieszczeniach wywołanych drugim stanem jest równa pracy drugiego obciążenia na odpowiednich przemieszczeniach wywołanych stanem pierwszym



$$P_C^I \cdot f_C^{II} = M_B^{II} \cdot u_B^I$$

## Zasada Maxwella

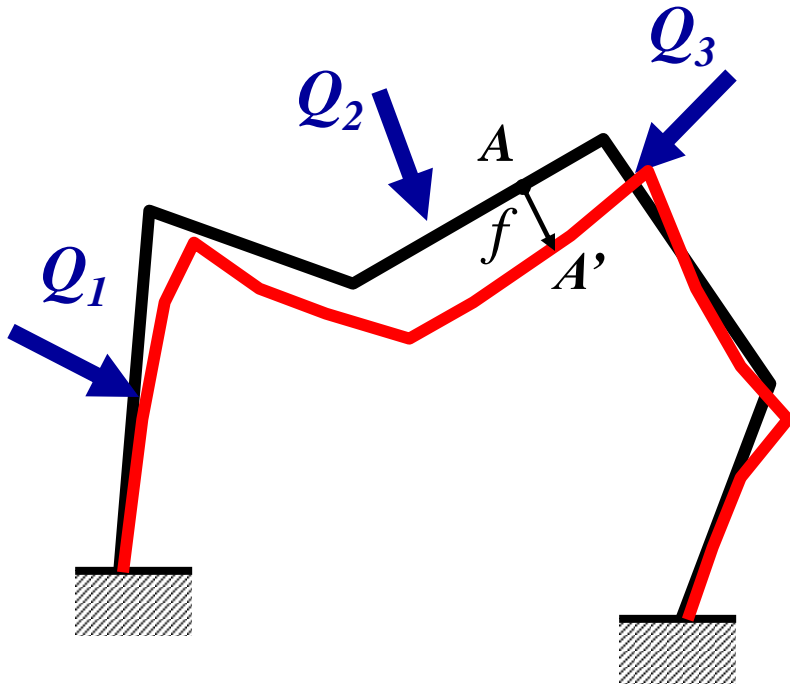
Jeśli obciążenia obu stanów są równe (liczbowo):

$$P_C^I = M_B^{II}$$

To przemieszczenia w obu stanach są równe (liczbowo):

$$f_C^{II} = u_B^I$$

# Metody energetyczne



## Układ Clapeyrona

To ustrój, w którym przemieszczenia dowolnego punktu dają się przedstawić jako liniowe funkcje jego obciążenia.

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j Q_j$$

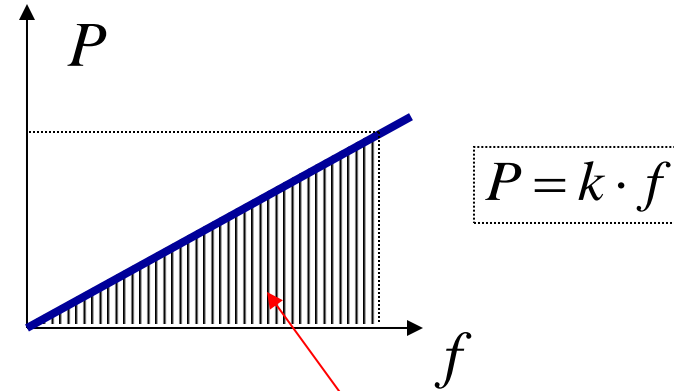
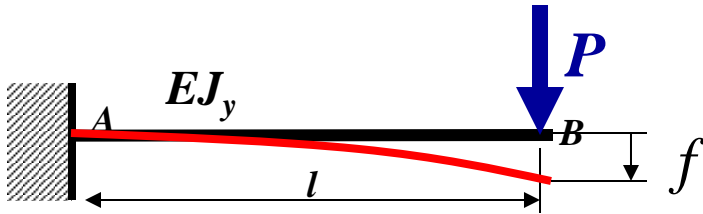
$\alpha_j$  - współczynniki liniowe

### Warunek:

- 1) Materiał liniowo-sprężysty
- 2) Przemieszczenia są małe
- 3) Układ jest zachowawczy

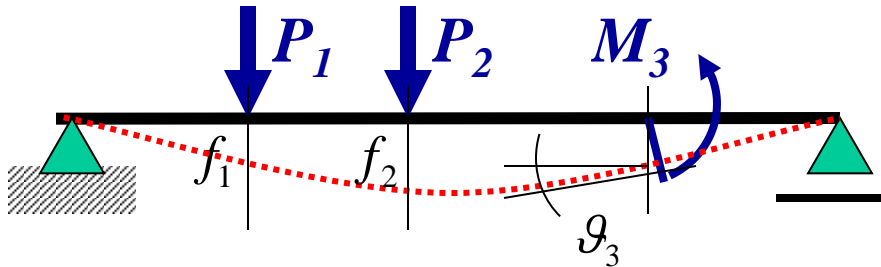
# Metody energetyczne

Ustrój liniowy i sprężysty:



Energia sprężysta:

$$U_{spr} = \int_0^f P \cdot df = \int_0^f k \cdot f \cdot df = \frac{1}{2} k \cdot f^2 = \frac{1}{2} P \cdot f$$



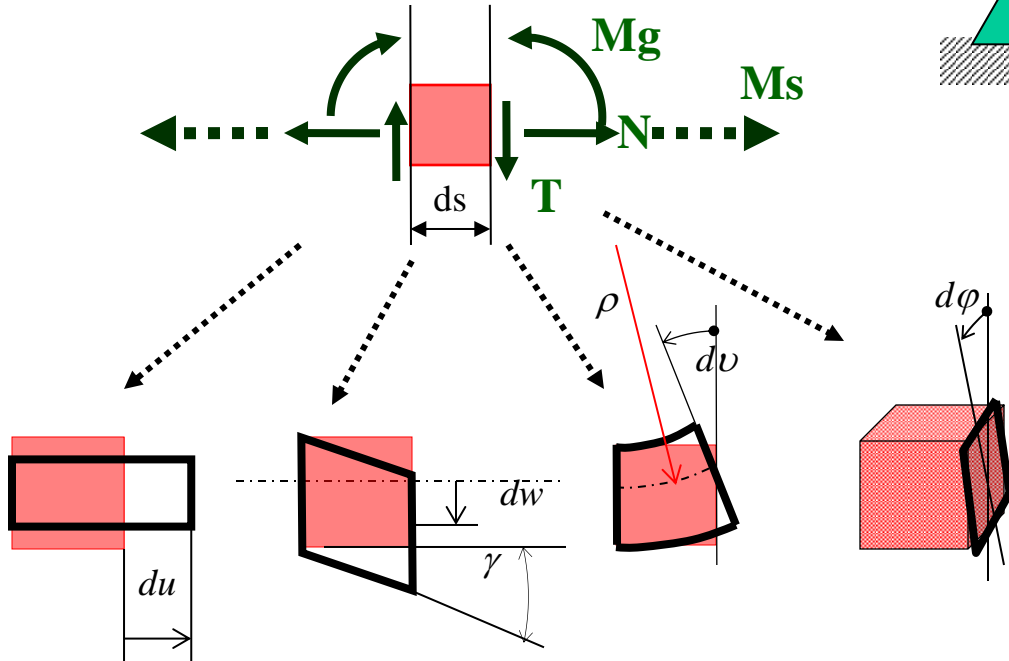
## Tw. Clapeyrona

Energia sprężysta ciała jest równa połowie sumy iloczynów wszystkich obciążeń przez odpowiadające im przemieszczenia.

$$U_{spr} = \frac{1}{2} (P_1 \cdot f_1 + P_2 \cdot f_2 + M_3 \cdot g_3 + \dots)$$

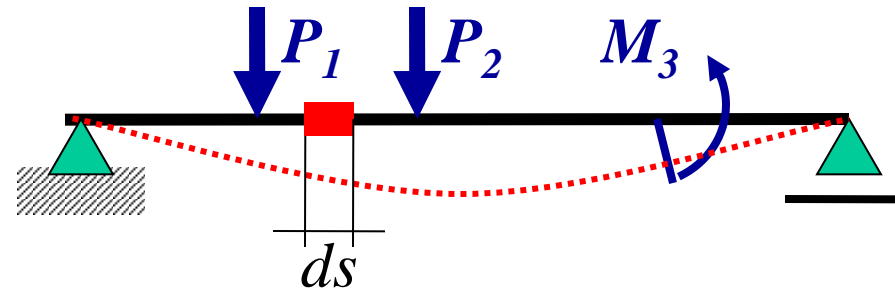
# Metody energetyczne

## Energia odkształcenia sprężystego



Z tw. Clapeyrona

$$dW = dU_{spr} = \frac{1}{2} (M_g \cdot dv + M_s \cdot d\phi + N \cdot du + T \cdot dw)$$



Dla konstrukcji prętowej liniowo sprężystej:

$$du = \varepsilon_x \cdot ds = \frac{N}{AE} ds$$

$$dw = \gamma \cdot ds = \psi \frac{T}{AG} ds$$

$$dv = w'' \cdot ds = \frac{1}{\rho} ds = \frac{M_g}{EJ} ds$$

$$d\phi = \frac{M_s}{GJ_s} ds$$

Ostatecznie:

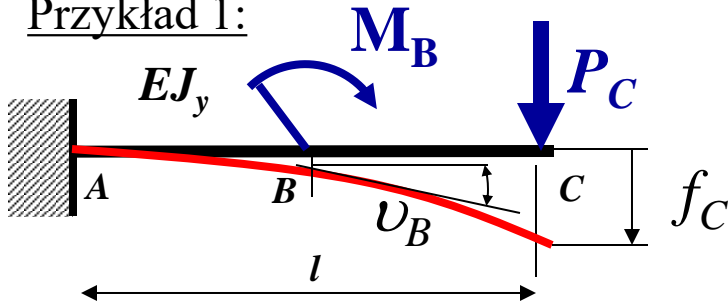
$$U_{spr} = \frac{1}{2} \left( \int_l \frac{M_g^2 ds}{EJ_y} + \int_l \frac{M_s^2 ds}{GJ_s} + \int_l \frac{N^2 ds}{EA} + \psi \int_l \frac{T^2 ds}{GA} \right)$$

# Metody energetyczne

## Tw. Castigliano

Pochodna energii odkształcenia sprężystego względem uogólnionej siły jest równa uogólnionemu przemieszczeniu odpowiadającemu tej sile

Przykład 1:

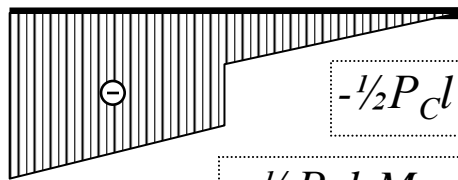


$$\frac{\partial U_{spr}}{\partial P_C} = f_C$$

$$\frac{\partial U_{spr}}{\partial M_B} = v_B$$

$$U_{spr} \cong \frac{1}{2} \int_l \frac{M_g^2 ds}{EJ_y}$$

Mg(x)



$$-P_C l - M_B$$

$$-\frac{1}{2} P_C l - M_B$$

$$-\frac{1}{2} P_C l$$

$$U_{spr} \cong \frac{1}{2EJ_y} \left( \frac{1}{2} P_C l \cdot l \cdot \frac{2}{3} P_C l + M_B \frac{1}{2} l \cdot M_B + 2 \cdot \frac{1}{2} (P_C l + \frac{1}{2} P_C l) \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_B \right)$$

$$U_{spr} \cong \left( \frac{P_C^2 l^3}{6EJ_y} + \frac{M_B^2 l}{4EJ_y} + \frac{3P_C M_B l^2}{8EJ_y} \right)$$

$$f_C = \frac{\partial U_{spr}}{\partial P_C} \cong \frac{\partial}{\partial P_C} \left( \frac{P_C^2 l^3}{6EJ_y} + \frac{M_B^2 l}{4EJ_y} + \frac{3P_C M_B l^2}{8EJ_y} \right) = \frac{P_C l^3}{3EJ_y} + \frac{3M_B l^2}{8EJ_y}$$

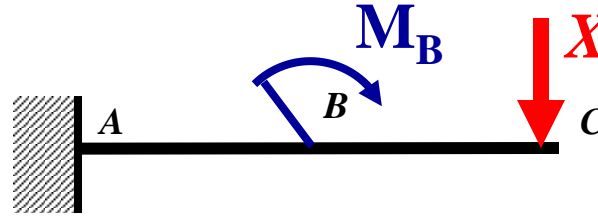
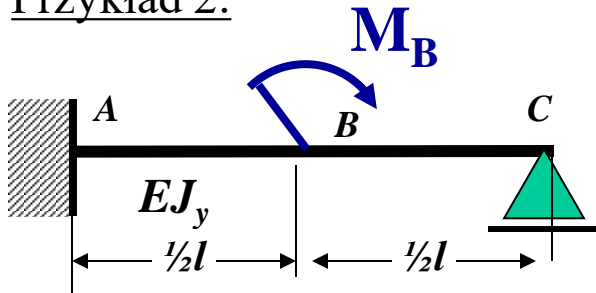
$$v_B = \frac{\partial U_{spr}}{\partial M_B} \cong \frac{\partial}{\partial M_B} \left( \frac{P_C^2 l^3}{6EJ_y} + \frac{M_B^2 l}{4EJ_y} + \frac{3P_C M_B l^2}{8EJ_y} \right) = \frac{M_B l}{2EJ_y} + \frac{3P_C l^2}{8EJ_y}$$

# Metody energetyczne

## Tw. Manabrei

W statycznie niewyznaczalnym układzie Clapeyrona pochodna energii sprężystej całego układu względem statycznie niewyznaczalnej reakcji jest równa 0

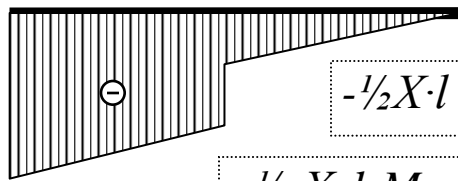
Przykład 2:



$$\frac{\partial U_{spr}}{\partial X_i} = 0$$

$$U_{spr} \cong \frac{1}{2} \int_l \frac{M_g^2 ds}{EJ_y}$$

$M_g(x)$



$$U_{spr} \cong \frac{1}{2EJ_y} \left( \frac{1}{2} X \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} X \cdot l + M_B \frac{1}{2} l \cdot M_B + 2 \cdot \frac{1}{2} (X \cdot l + \frac{1}{2} X \cdot l) \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_B \right)$$

$$U_{spr} \cong \left( \frac{X^2 l^3}{6EJ_y} + \frac{M_B^2 l}{4EJ_y} + \frac{3X \cdot M_B l^2}{8EJ_y} \right)$$

$$\frac{\partial U_{spr}}{\partial X} \cong \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{X^2 l^3}{6EJ_y} + \frac{M_B^2 l}{4EJ_y} + \frac{3X \cdot M_B l^2}{8EJ_y} \right) = \frac{X \cdot l^3}{3EJ_y} + \frac{3M_B l^2}{8EJ_y} = 0$$

$$X = -\frac{9M_B}{8l}$$

# Metody energetyczne

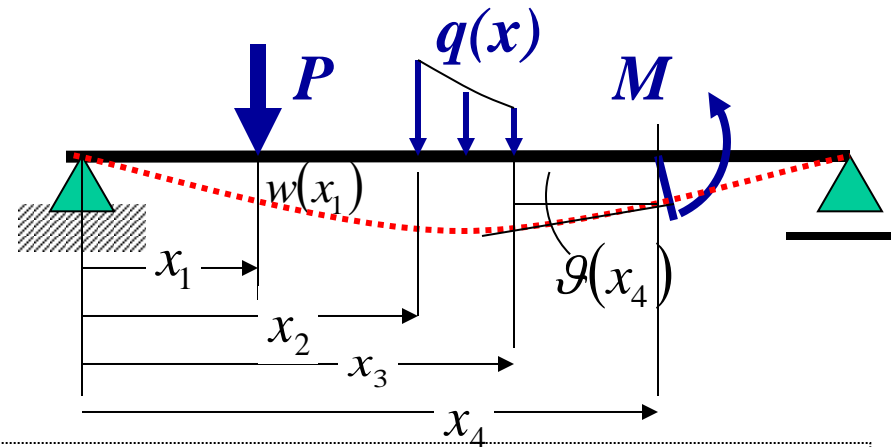
## Twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej

Ze wszystkich geometrycznie dopuszczalnych postaci przemieszczeń, którym może podlegać ustrój sprężysty, wystąpi ta, dla której całkowita energia potencjalna osiągnie wartość minimalną

$$V = U_{spr} - W_z = \min!$$

Energia odksz. spr.

Praca sił zewnętrznych



$$V = \frac{1}{2} \int_l EJ [w''(x)]^2 dx - \left( P \cdot w(x_1) + \int_{x_2}^{x_3} q(x) \cdot w(x) dx + M \cdot w'(x_4) \right)$$

Dla jakiej  $w(x)$  mamy  $V_{min}$  ?

$V$  – funkcjonal (poszukiwanej funkcji  $w(x)$  przypisuje liczbę)

Minimalizacja funkcjonału jest zadaniem rachunku wariacyjnego



# Metody energetyczne

## Metoda Ritz'a

Wprowadźmy funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = a_1 \cdot \Phi_1(x) + a_2 \cdot \Phi_2(x) + \dots + a_n \cdot \Phi_n(x)$$

(może to być szereg potęgowy lub Fouriera)

Funkcja aproksymująca jest kombinacją liniową nieznanymi parametrów  $a_i$  i znanych funkcji geometrycznie dopuszczalnych  $\Phi_i(x)$

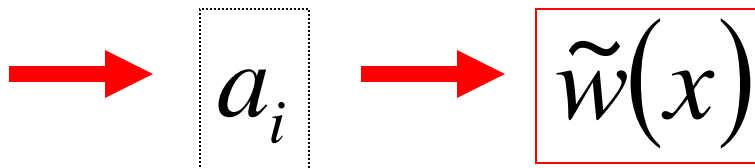
Po podstawieniu tej funkcji do wyrażenia na całkowitą energię potencjalną otrzymamy funkcję parametrów  $a_i$ :

$$V = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Teraz należy znaleźć minimum funkcji:

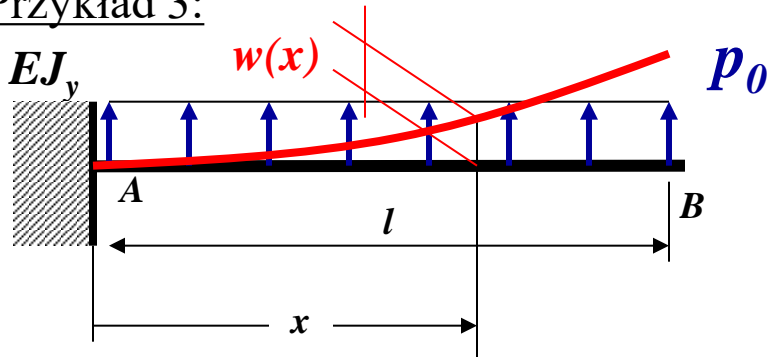
$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0$$

To jest układ  $n$ -u algebraicznych liniowych



# Metody energetyczne

Przykład 3:



Rozwiąż metodą Ritz'a belkę wspornikową używając daną funkcję aproksymacyjną:

$$\tilde{w}(x) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3$$

Warunki brzegowe:  $\tilde{w}(x=0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$        $\tilde{w}'(x=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$

Aby funkcja spełniała warunki geometryczne:

$$\tilde{w}(x) = a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \rightarrow \tilde{w}'(x) = 2a_3 \cdot x + 3a_4 \cdot x^2 \rightarrow \tilde{w}''(x) = 2a_3 + 6a_4 \cdot x$$

Energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_l EJ [w''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot w(x) dx$$

Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot \tilde{w}(x) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3 a_4 x + 36a_4^2 x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

# Metody energetyczne

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3a_4x + 36a_4^2x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3x^2 + a_4x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2x + 12a_3a_4x^2 + 12a_4^2x^3) \Big|_0^l - p_0 \left( \frac{1}{3}a_3x^3 + \frac{1}{4}a_4x^4 \right) \Big|_0^l$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2l + 12a_3a_4l^2 + 12a_4^2l^3) - p_0 \left( \frac{1}{3}a_3l^3 + \frac{1}{4}a_4l^4 \right)$$

Warunek minimum funkcji:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_3} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_3} = \frac{EJ}{2} (8la_3 + 12l^2a_4) - \frac{1}{3} p_0 l^3 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_4} = \frac{EJ}{2} (12l^2a_3 + 24l^3a_4) - \frac{1}{4} p_0 l^4 = 0$$

$$a_3 = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y}$$

$$a_4 = -\frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y}$$

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

# Metody energetyczne

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Przybliżenie momentu gnącego:

$$\tilde{M}_g = EJ_y \tilde{w}''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T} = EJ_y \tilde{w}'''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$

# Metody energetyczne

Rozwiązanie przybliżone:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

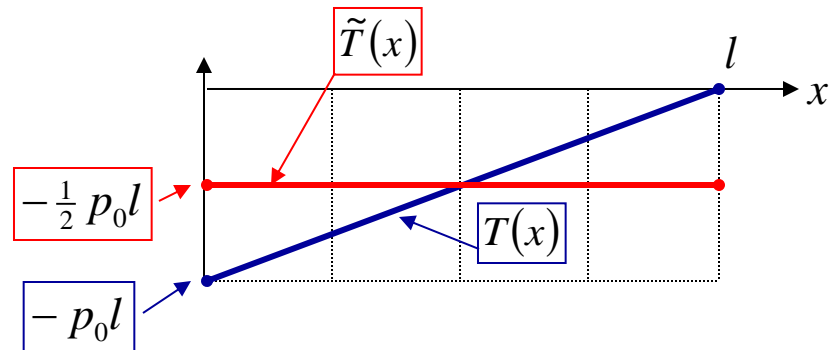
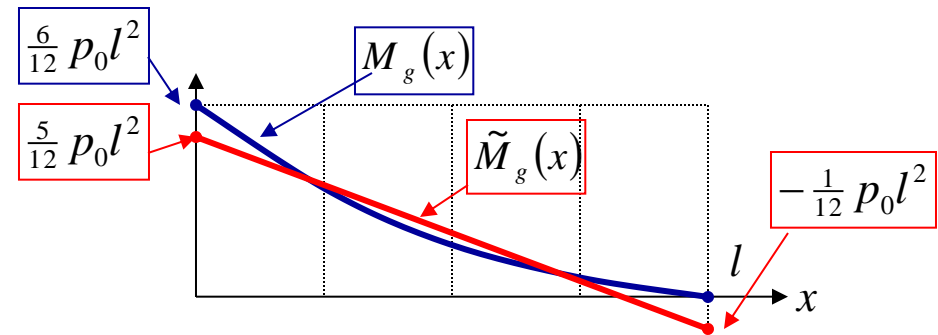
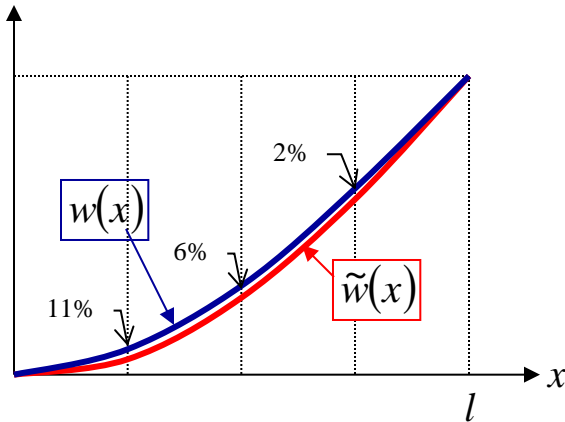
$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$



$$\tilde{w}(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{3}{4}l\right) = 0.082 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right) = 0.042 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{1}{4}l\right) = 0.012 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

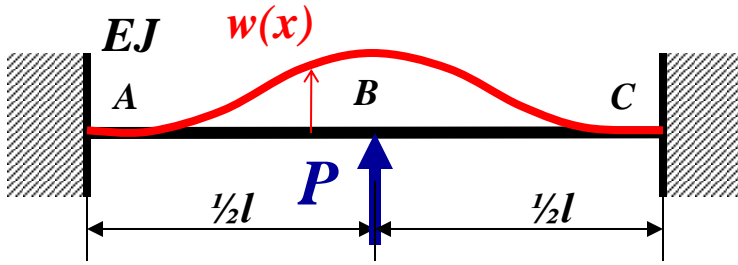
$$w\left(\frac{3}{4}l\right) = 0.084 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w\left(\frac{1}{2}l\right) = 0.044 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w\left(\frac{1}{4}l\right) = 0.013 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

# Metody energetyczne

Przykład 4:



Rozwiąż metodą Ritz'a belkę statycznie niewyznaczalną używając daną funkcję aproksymacyjną:

$$\tilde{w}(x) = A \cdot \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

$$\tilde{w}'(x) = \frac{2\pi}{l} A \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

$$\tilde{w}''(x) = \frac{4\pi^2}{l^2} A \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Warunki brzegowe:

$$\tilde{w}(x=0) = 0$$

$$\tilde{w}'(x=0) = 0$$

$$\tilde{w}(x=l) = 0$$

$$\tilde{w}'(x=l) = 0$$

Funkcja spełniała warunki geometryczne!

Całkowita energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [w''(x)]^2 dx - P \cdot w\left(\frac{1}{2}l\right)$$



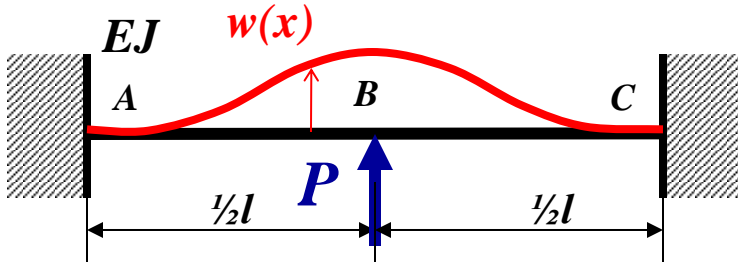
Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - P \cdot \tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{4\pi^2}{l^2} A \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} \right)^2 dx - P \cdot A \cdot \left( 1 - \cos \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}l}{l} \right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \frac{16\pi^4}{l^4} A^2 \cdot \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx - 2P \cdot A$$

# Metody energetyczne



$$\tilde{w}(x) = A \cdot \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

$$V = \frac{EJ}{2} \frac{16\pi^4}{l^4} A^2 \cdot \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx - 2P \cdot A$$

Całkowita energia potencjalna:

$$V = \frac{4\pi^4 EJ}{l^3} A^2 - 2P \cdot A$$

Warunek minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{8\pi^4 EJ}{l^3} A - 2P = 0$$

$$A = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ}$$

Funkcja przybliżona opisująca linię ugięcia:

$$\tilde{w}(x) = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ} \cdot \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

Przybliżenie momentu gnącego:

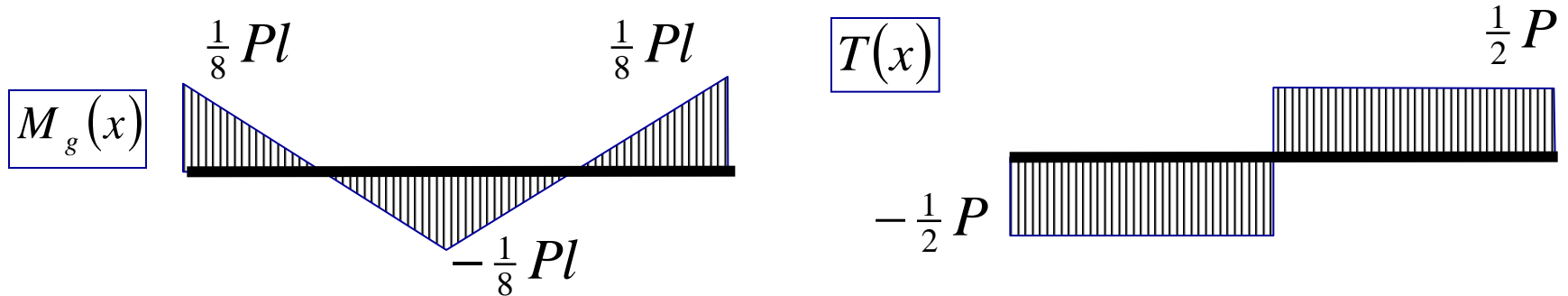
$$\tilde{M}_g(x) = EJ \cdot \tilde{w}''(x) = \frac{Pl}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T}(x) = EJ \cdot \tilde{w}'''(x) = -\frac{P}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

# Metody energetyczne

Rozwiązanie ścisłe (*metoda M-M*):

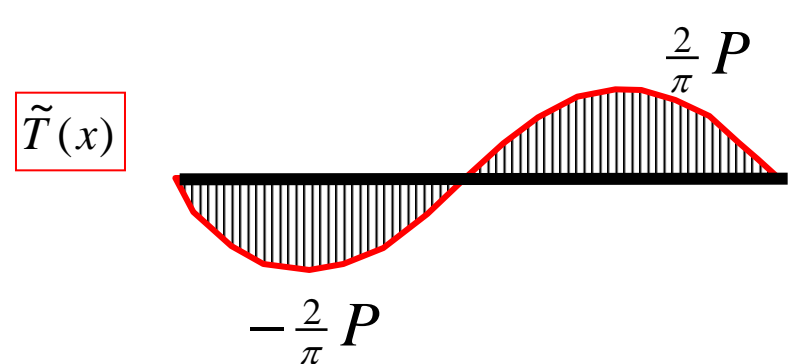
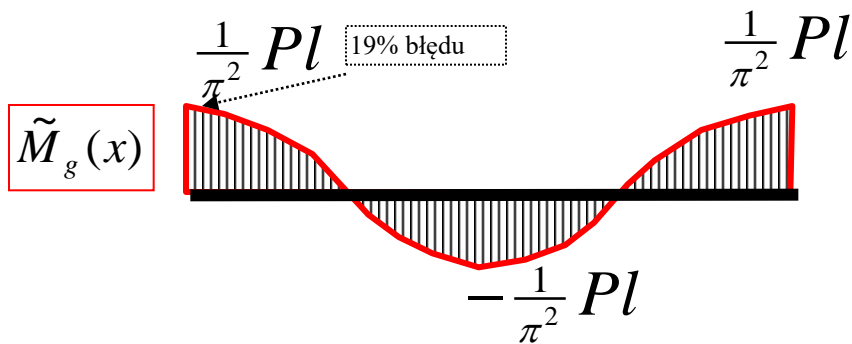


Rozwiązanie przybliżone (*metoda Ritz'a*):

$$\tilde{w}(x) = \frac{Pl^3}{4\pi^4 EJ} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{Pl}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{P}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$



$$\tilde{w}_{extr} = \tilde{w}\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{-Pl^3}{2\pi^4 EJ} = -0.005133 \frac{Pl^3}{EJ}$$

1.5% błędu

$$w_{extr} = w\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{-Pl^3}{192 EJ} = -0.005208 \frac{Pl^3}{EJ}$$